

江苏大学 硕士研究生入学考试样题

A 卷

科目代码: 603

满分: 150 分

科目名称: 高等数学

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

1、已知 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan 3x$ 与 $\frac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____

2、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} =$ _____

3、曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为 _____

4、设 $f(x) = x^2$, 且 $F(x) = \int_0^{2x} xf(t)dt$, 则 $F'(x) =$ _____

5、 $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} dx =$ _____

6、设 $e^{x+y} - y \sin x = 0$, 则 $dy =$ _____

二、计算题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、计算定积分 $\int_0^1 \arcsin x dx$.

2、计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$.

3、求微分方程 $y'' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ 的特解.

4、已知 $\int_x^{2 \ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{\pi}{6}$, 求 x .

三、证明题 (每小题 10 分, 共 40 分)

1、证明当 $x > 0$ 时, $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$.

2、证明恒等式 $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

4、证明曲线 $y = \sin x$ 的一个周期的弧长等于椭圆 $2x^2 + y^2 = 2$ 的周长.

四、(12分) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平

面图形 D

(1) (6分) 求 D 的面积 A.

(2) (6分) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

五、(14分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ (x-1)^2, & x > 0 \end{cases}$ 的极值.

六、(14分) 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ c, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$, 求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$, 并讨论 $\Phi(x)$ 在 $[0, \pi]$

上的连续性.