江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A卷

科目代码： 602

科目名称： 线性代数

满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空选择题（每空 3 分，共 30 分）

1. n阶行列式D中有n^2-n 个以上的元素为零，则D=________.

2. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$ ______________.

3. 设A是n阶方阵，C为一正交矩阵，则$R(C^TAC)$_____$R(A)$（填“>,<或=”）.

4. t满足__________时，二次型$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$正定.

5. 设$\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$均为矩阵$A$对应特征值$\lambda=2$的特征向量，$\beta=\alpha_1-\alpha_2$，则$A\beta=$__________.

6. 若A是（ ），则必有$A^T=A$.

(A)对角矩阵 (B)三角形矩阵 (C)可逆矩阵 (D)反对称矩阵

7. 设n阶方阵A满足$A^2-A-2E=0$，则必有（ ）.

(A) $A=2E$ (B) $A=-E$ (C) $A-E$可逆 (D) A不可逆

8. A与B是两个相似的n阶矩阵，则（ ）.

(A)存在可逆矩阵P，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ (B)存在对角矩阵D，使A与B都相似于D

(C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ (D) $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$

9. 设 A 为三阶矩阵，$|A|=2$，则伴随矩阵 A^* 的行列式 $|A^*|$ 是（　　）.

(A) 4　　　　(B) 8

(C) 2　　　　(D) 1

10. 设 $\mathbf{V}=\{\ \mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3) \mid x_1+x_2+x_3=0\ \}$，且 $x_1,\ x_2,\ x_3 \in R$，则（　　）.

(A) V 是 1 维向量空间　　　　(B) V 是 2 维向量空间

(C) V 是 3 维向量空间　　　　(D) V 不是向量空间

二、计算行列式（第一小题 7 分，第二小题 8 分，共 15 分）

1. $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$　　　　2. $D_n=\begin{vmatrix} x+1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$

三、（10 分）已知 $f(x)=x^2\text{-}3x+2,\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值.

四、（15 分）设 $X\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$，求 X.

五、（15 分）设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)^T,\alpha_2=(0,3,1,2)^T,\alpha_3=(1,-1,2,0)^T$，$\alpha_4=(3,7,0,14)^T$，$\alpha_5=(2,1,5,6)^T$，求该向量组的一个极大无关组，并将其余向量用该极大无关组线性表示.

六、（15 分）a 为何值时，方程组 $\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1 \\ ax_2-3x_3=3 \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \end{cases}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求出所有解.

七、（15 分）求一个正交变换 $X=PY$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$ 为标准形，并判断该二次型是否正定.

八、（15 分）判断向量组 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(1,2,3)^T,\alpha_3=(2,0,1)^T$ 是否为 R^3 的基？若是，求向量 $\beta=(-4,-3,-5)^T$ 在该基下的坐标.

九、(10 分) 在 P^4 中，求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵，其中

$$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0,0),\ \varepsilon_3=(0,0,1,0),\ \varepsilon_4=(0,0,0,1),$$

$$\eta_1=(2,1,-1,1),\ \eta_2=(0,3,1,0),\ \eta_3=(5,3,2,1),\ \eta_4=(6,6,1,3)$$

十、（10 分）证明:如果 $A=AB$, 但 B 不是单位矩阵, 则 A 必为奇异矩阵.