

**江苏大学**  
**硕士研究生入学考试样题**

科目代码: 601

**A卷**

科目名称 数学分析

满分: 150分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、填空题 (填空题 (本大题共 6 小题, 每题 5 分, 计 30 分))

(1) 记  $S = \{x | x^2 < 2\}$ , 则  $\sup S =$  \_\_\_\_\_,  $\inf S =$  \_\_\_\_\_。

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} =$  \_\_\_\_\_。

(3) 级数  $a + bx + ax^2 + bx^3 + \dots$ ,  $0 < a < b$ , 的收敛半径 \_\_\_\_\_。

(4) 已知  $u(x, y) = \tan xy + \arctan(x + y)$ , 则  $du(1, 0) =$  \_\_\_\_\_。

(5) 当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $x^a$  为  $x \rightarrow +\infty$  时与  $\sqrt{x^2 + x^5}$  为同阶无穷大。

(6) 设  $e^y + xy = e$ , 则  $y'(0) =$  \_\_\_\_\_。

二. 已知参数方程  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(t \cos t - \sin t) \end{cases}$ , 计算  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。(10 分)

三. 设  $p$  为正整数, 证明: 若  $p$  不是完全平方数, 则  $\sqrt{p}$  是无理数。(10 分)

四. 已知函数  $f(x, y)$  在  $[a, b] \times [c, +\infty)$  上连续, 证明: 若  $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  在  $\{[a, b]$  上一致收敛, 则  $I(x)$  在  $\{[a, b]$  上连续。(12 分)

五. 证明: 设  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 证明:  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续。(10 分)

六. 已知曲线  $r = a(1 + \cos \theta)$ , 其中  $a > 0$ , 试求: (1) 该曲线的弧长; (2) 曲线所围图形的面积; (3) 曲线绕极轴旋转所成立体的曲面面积。(12 分)

七. 证明下列不等式: (1)  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$ , 其中  $a, b$  为任意实数; (2)

$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b$ , 其中  $a, b$  为任意非负实数。(12 分)

八. 证明方程  $2^x - x^2 - 1 = 0$  有且仅有三个不同实根。(14 分)

九. 设  $\{x_n\}$  为单调数列, 证明: 若  $\{x_n\}$  具有聚点, 则其必唯一, 且该聚点必为数列的确界。(12 分)

十. 已知  $f(x)$  和  $g(x)$  为  $[-\pi, \pi]$  上可积函数, 且它们的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上分别一致收敛于  $f(x)$  和  $g(x)$ , 记  $a_n, b_n$  为  $f(x)$  的相应的 Fourier 系数,  $\alpha_n, \beta_n$  为  $g(x)$  的相

应的 Fourier 系数, 证明:  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$ 。(12 分)

十一. 证明: 已知  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$ 。1) 至少存在两点  $x_1, x_2 \in (a, b)$ 。使得  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ; 2) 若还成立  $\int_a^b x^2 f(x)dx = 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  中至少存在三个零点。(10 分)

十二. 已知积分  $\int_L \frac{x}{y} r^s dx - \frac{x^2}{y^2} r^s dy$  与积分曲线无关, 其中  $r^2 = x^2 + y^2$ , 是确定参数  $s$  的值。(6 分)