江苏大学
硕士研究生入学考试样题

A卷

科目代码： 602

科目名称 线性代数 满分： 150分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空选择题(3分×10=30分)

1. 设A, B均为3阶方阵，A^*为A的伴随矩阵，$|A|=4, |B|=2$，则$|A^*B^{-1}| =$ ________.

2. 设$P^{-1}AP = \Lambda$，其中$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

   $A^{2019} =$ ________.

3. 对齐次线性方程组$Ax = 0$ 的系数矩阵A 施行初等行变换得$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，

   则原方程组的基础解系含有________个向量.

4. 设方阵A有一个特征值2，则$A^3 - 4A^2 + 3A$的一个特征值是________.

5. 矩阵$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$正定，则$k$应满足条件________.

6. 设四阶方阵A的秩为2，则其伴随矩阵A^*的秩为________.

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

7. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　　　).

   (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$

   (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$

   (C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3$

   (D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$

8. 设A为$m \times n$矩阵， $Ax = 0$是非齐次线性方程组$Ax = b$所对应的齐次线性方程组，则下列结论中正确的是(　　　).

(A) 若$Ax=0$仅有零解， 则$Ax=b$有唯一解

(B) 若$Ax=0$有非零解， 则$Ax=b$有无穷多解

(C) 若$Ax=b$有无穷多解， 则$Ax=0$仅有零解

(D) 若$Ax=b$有无穷多解， 则$Ax=0$有非零解

9. n阶矩阵A具有n个不同的特征值是A可对角化的(　　　　).

(A) 充分必要条件　　　　(B) 充分但非必要条件

(C)必要但非充分条件　　　　(D)既非充分也非必要条件

10. 下列R^n中的子集(　　　　) 构成R^n中的子空间.

(A) $V_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1\times x_2\times\cdots\times x_n=0,x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$

(B) $V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$

(C) $V_3=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\}$

(D) $V_4=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i$是有理数$,i=1,2,\cdots,n\}$

二、计算行列式(6分+9分=15分)

(1) $D=\begin{vmatrix}2&1&4&-1\\1&2&3&-2\\3&-1&2&-1\\5&0&6&-2\end{vmatrix}$　　(2) $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$

三、(15分) 设 $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$, 求矩阵$X$.

四、(15分) 求向量组

$\alpha_1=(1,1,3,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-1,3)^T,\alpha_3=(5,-2,8,9)^T,\alpha_4=(-1,3,1,7)^T$

的秩和一个极大线性无关组, 并用该极大线性无关组表示其余向量.

五、(15分) 问λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

无解？有唯一解？有无穷多解?并在有无穷多解时求出通解.

六、(15 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

求一正交变换$x = Py$, 将该二次型f 化为标准形, 写出其标准形.

七、(15分) 已知三维线性空间$V = R^3$的一组基为

$$\beta_1 = (1,1,0)^T, \beta_2 = (0,0,2)^T, \beta_3 = (0,3,2)^T.$$

求向量$\alpha = (5,8,-2)^T$关于基$\beta_1, \beta_2, \beta_3$下的坐标.

八、(15分) 三维线性空间R^3中, 取两组基

$$\alpha_1 = (1,0,1)^T, \alpha_2 = (1,1,0)^T, \alpha_3 = (0,1,1)^T;$$

$$\beta_1 = (1,0,3)^T, \beta_2 = (2,2,2)^T, \beta_3 = (-1,1,4)^T.$$

求由基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$到$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的过渡矩阵.

九、(15分) 设$c_1, c_2, \cdots, c_r$是互不相同的数, $r \le n$,证明下列向量组

$$\alpha_i = (1, c_i, c_i^2, \cdots, c_i^{n-1})^T \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

线性无关.